

福建中學
中六級 上學期統測 (2021-2022)
數學 延伸部分 單元一
(一小時十五分鐘)

日期：二零二一年十一月九日

姓名：_____

時間：上午十時三十分至上午十一時四十五分

班別：_____ 班號：_____

考生須知：

1. 本試卷分兩部分，即甲部(32 分)和乙部(26 分)。
2. 所有試題均須作答。答案須寫在單行紙上。
3. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
4. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值或四位小數表示。
5. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

甲部 (32 分)

1. 下表顯示一離散隨機變量 X 的概率分佈, 其中 a 及 b 均為常數:

x	1	4	9	16	25
$P(X=x)$	0.12	a	0.15	0.29	b

已知 $E(X) = 9.34$ 。求

- (a) a 及 b ,
 (b) $E[(3 - 2X)^2]$ 及 $\text{Var}(3 - 2X)$ 。

(6 分)

2. 設 A 及 B 為兩事件。把 A 及 B 的互補事件分別記為 A' 及 B' 。假設 $P(A \cap B) = 0.07$ 及 $P(B' | A) = 3P(A')$ 。

- (a) 求 $P(A)$ 。
 (b) 若 A 與 B 獨立, 求 $P(A \cup B)$ 。

(6 分)

3. 設 $f(x)$ 為一連續函數使得對所有實數 x , $f'(x) = \frac{36-18x}{(2x^2-8x+11)^3}$ 。

- (a) 若 $f(x)$ 於 $x=a$ 處達至其極大值, 求 a 。
 (b) 已知 $f(x)$ 的極值為 3。求
 (i) $f(x)$,
 (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

(6 分)

4. 設 $f(x) = px^3 - 6x^2 + qx + 63$, 其中 p 及 q 均為常數。將曲線 $y = f(x)$ 記為 Γ 。已知 $(3, 225)$ 為 Γ 的轉向點。

- (a) 求 p 及 q 。
 (b) 求 $f(x)$ 的極小值及極大值。
 (c) 寫出 Γ 的水平切線的方程。

(7 分)

5. 對所有 $x \geq 1$, 定義 $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x} - 2}{x}$ 。

- (a) 利用代換積分法, 求 $\int f(x) dx$ 。
 (b) 將曲線 $y = f(x)$ 記為 C 。
 (i) 寫出 C 的 x 截距。
 (ii) 求 C 、 x 軸、直線 $x = e$ 及 $x = e^9$ 圍成的區域的面積。

(7 分)

乙部 (26 分)

6. 一則在某電視頻道播放的廣告的片長 X (以秒為單位) 依循一平均值為 μ 秒及標準差為 σ 秒的正態分佈。已知有 17.11% 的片長超過 17.8 秒，並有 38.30% 的片長與 μ 相差不超過 2 秒。

(a) 求 μ 及 σ 。

(4 分)

- (b) 若某廣告的片長超過 h 秒，則須付額外費用。假設某天電視頻道共播放 600 則廣告。假設不同廣告的片長相互獨立，求 h 的最小整數值使得須付額外費用的廣告的期望值不超過 9。

(3 分)

- (c) 為縮短廣告的片長，廣告的每秒費用作出調整。經調整後，一則廣告的片長 Y (以秒為單位) 依循一平均值為 θ 秒及標準差為 3.6 秒的正態分佈。

- (i) 經理 P 隨機選取 16 則廣告組成一樣本，並記錄其片長 (以秒為單位) 如下：

12	16	10	15	15	16	9	18
13	11	14	16	8	12	13	10

求 θ 的 95% 置信區間。

- (ii) 經理 Q 將要隨機選取 n 則廣告組成另一樣本。他要求該 n 則廣告的平均片長與 θ 相差不超過 2 秒的概率大於 0.995。求能符合其要求的 n 的最小值。

(6 分)

7. 某缸載着一些水。現把水注入該缸。設該缸內水的體積為 $V \text{ m}^3$ 。已知

$$V = 57 - \frac{360}{ae^{bt} + 6},$$

其中 $t (\geq 0)$ 為自注入開始起計所經過的秒數, 且 a 及 b 均為常數。

(a) 將 $\ln\left(\frac{360}{57-V} - 6\right)$ 表為 t 的線性函數。

(1 分)

(b) 已知在 (a) 中所得的線性函數的圖像通過原點及點 $(20, 2)$ 。求

(i) a 及 b ,

(ii) $\frac{dV}{dt}$,

(iii) 當 $\frac{dV}{dt}$ 達至其最大值時 V 的值。

(8 分)

(c) 慧中得知 $S = 3V^{\frac{2}{3}}$, 其中 $S \text{ m}^2$ 為該缸被浸濕的總表面面積。

(i) 求當 $\frac{dV}{dt}$ 達至其最大值時 $\frac{dS}{dt}$ 的值。

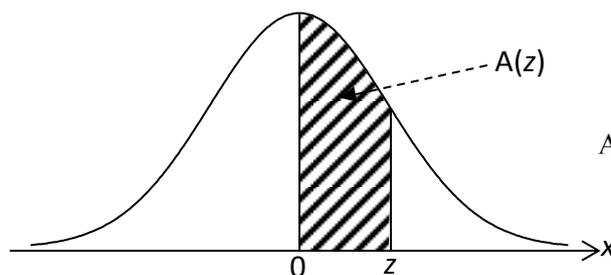
(ii) 慧中宣稱當 $\frac{dV}{dt}$ 達至其最大值時, $\frac{dS}{dt}$ 達至其最大值。該宣稱是否正確? 試解釋你的答案。

(4 分)

標準正態分佈表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註：本表所列數字為標準正態曲線下由 $x = 0$ 至 $x = z$ ($z \geq 0$) 之間的面積。
負值 z 所對應的面積可利用對稱性求得。



$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$