

福建中學
中四級 上學期統測 (2021-2022)
數學 延伸部分 單元一
(一小時十五分鐘)

日期：二零二一年十一月十二日

姓名：_____

時間：上午八時三十分至上午九時四十五分

班別：_____ 班號：_____

考生須知：

1. 所有試題均須作答。答案須寫在答題簿上。
2. 本試卷滿分為67分。
3. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
4. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值或四位小數表示。
5. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

1. 化簡 $\frac{(2n)!(n+1)}{(2n+2)!}$ 。

(3 分)

2. 求 $C_{n-2}^{n+1} - C_{n-4}^{n-1}$ ，答案以 n 表示。

(3 分)

3. 已知 $\sum_{k=1}^{10} x_k = -8$ ， $\sum_{k=1}^{10} y_k = 32$ 及 $\sum_{k=1}^{10} x_k y_k = 24$ ，求 $\sum_{k=1}^{10} (2x_k - 1)(y_k + 1)$ 的值。

(3 分)

4. 已知 $(1+px)^n = 1 - 27x + 36p^2x^2 + x$ 較高次冪的項，其中 p 為常數和 n 為正整數。
求 p 和 n 的值。

(4 分)

5. 求 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3 (x-3)^6$ 的展式中的常數項。

(5 分)

6. 求 $\left(\frac{1}{3x^2} - 2x\right)^9$ 的展式中按 x 的降冪序排列的第 5 項的係數和常項數。

(5 分)

7. (a) 按 x 的升幂排列，展開 e^{-3x} 至級數的 x^3 項。

(b) 由此，按 x 的升幂排列，展開 $\frac{(x+3)^4}{e^{3x}}$ 至級數的 x^3 項。

(5 分)

8. 化簡下列各數式。

(6 分)

(a) $\ln(a^2 - 9) - \ln \sqrt{a+3} - \ln \sqrt{a-3}$

(b) $\frac{\ln a^2 - \ln \sqrt[4]{a}}{\ln \sqrt{\frac{1}{a}}}$

(c) $e^{3\ln 2 - 2\ln 3}$

9. 解下列各方程。

(12 分)

(a) $\ln x = \frac{1}{3}(\ln 8 + 3\ln 2)$

(b) $6e^x + e^{-x} = 5$

(c) $3e^{2x} - 13e^x + 4 = 0$

(d) $\sqrt{e^{x+1}} = 7^{2x-5}$

10. (a) 依 x 的升幂序展開 $(2e^x + 3)^3$ 至級數的 x^3 項。

(b) 若在 $\left(x + \frac{k}{x}\right)^2 (2e^x + 3)^3$ 的展式中 x 的係數是 -207 ，求 k 的所有可取值。

(5 分)

11. 在一次交通意外中，一些有毒化學劑洩漏到某湖裏。意外發生 t 天後，湖水中的化

學劑濃度 $C \text{ g/m}^3$ 為 $C = Ae^{-kt}$ ，其中 A 和 k 為常數。當 $t=1$ 時， $C=14.46$ 。

當 $t=2$ 時， $C=9.50$ 。

- (a) 求 A 和 k 的值，答案須準確至二位有效數字。
- (b) 基於安全理由，有關當局於意外發生後關閉了該湖，直至湖水中的化學劑濃度下降至 0.3 g/m^3 的安全水平為止。試估計意外發生後多久，該湖才能重開。(答案須準確至最接近的天。)

(6 分)

12. 一個實驗中，某液體的溫度 N (以 $^{\circ}\text{C}$ 為單位) 可用 $N = \frac{15e^{bt}}{e^{bt} + a}$ 模擬，其中 a 和 b 是常數，且 $t(\geq 0)$ 為自實驗開始起計所經過的分鐘數目。

- (a) 證明 $N = \frac{15}{ae^{-bt} + 1}$ 。
- (b) 將 $\ln\left(\frac{15}{N} - 1\right)$ 表示為 t 的線性函數。
- (c) 已知 (b) 所得的線性函數的圖像的斜率和水平軸截距分別為 -0.2 和 $5\ln 74$ 。
- (i) 求 a 和 b 。
- (ii) 求實驗開始時該液體的溫度。
- (iii) 實驗開始後最少經過多少分鐘，該液體的溫度會是 10°C 或以上？(答案須準確至最接近的整數。)

(10 分)