

福建中學
中五級 學年考試 (2020-2021)
數學 延伸部分 單元一
(兩小時三十分鐘)

日期：二零二一年六月八日

姓名：_____

時間：上午八時三十分至上午十一時

班別：_____ 班號：_____

考生須知：

1. 本試卷分兩部分，即甲部(50 分)和乙部(50 分)。
2. 所有試題均須作答。答案須寫在答題簿上。
3. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
4. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值或四位小數表示。
5. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

甲部 (50 分)

1. 設 A 和 B 為兩個事件。假設 $P(B) = 0.325$ ， $P(B|A) = 0.25$ 及 $P(B'|A') = 0.59375$ ，其中 A' 和 B' 分別為 A 和 B 的互補事件。
- (a) 求 $P(A)$ 。
- (b) 求 $P(A|B')$ 。
- (c) 求 $P(A' \cup B)$ 。

(5分)

2. 敏莉 按建議每天早上服用維他命膠囊。若 敏莉 一天早上遲起牀，則她當天早上忘記服用維他命膠囊的概率是 0.35；否則，她當天早上忘記服用維他命膠囊的概率是 0.25。已知 敏莉 一天早上遲起牀的概率是 0.2。
- (a) 求 敏莉 某天早上忘記服用維他命膠囊的概率。
- (b) 已知 敏莉 某天早上忘記服用維他命膠囊，求她當天早上遲起牀的概率。
- (c) 求 敏莉 某星期最少 5 天早上忘記服用維他命膠囊的概率。

(6分)

3. 下表顯示離散隨機變量 X 的概率分佈，其中 m 和 p 均為正常數。

x	-1	4	6	8
$P(X = x)$	$2p$	$0.2 - 3p$	$0.6 - 3p$	$mp + 0.2$

- (a) 求 m 。
- (b) 若 $10\text{Var}(X + m) = E(m^2 X - 29)$ ，求 p 。

(7分)

4. 某公司一週內接獲某產品的認購訂單的數目依循平均值為 μ 及標準差為 3.5 的分佈。該公司隨機收集 49 週組成一個樣本，並發現 μ 的近似 $\lambda\%$ 置信區間為 (10.98, 13.22)。
- (a) 求一週內該產品的認購訂單的數目之樣本平均值。
- (b) 求 λ 。
- (c) 求採樣的所需最小週數使得一週內該產品的認購訂單的數目之樣本平均值與 μ 相差大於 0.5 的概率最大為 0.038。

(7分)

5. (a) 按 x 的升幂序展開 $e^{3x} + e^{-2x}$ 至 x^2 項。

(b) 求 $(e^{3x} + e^{2x} - 1)\left(4 - \frac{x}{2}\right)^6$ 的展式中 x^2 的係數。

(5分)

6. 設 $f(x)$ 為連續函數使得對於所有實數 x ， $f'(x) = \frac{e^{-x} - me^{-2x}}{e^{-2x} - e^{-x} + 3}$ 。已知 $f(x)$ 在 $x = \ln 2$ 時達至其極小值。

(a) 求 m 。

(b) 已知 $f(x)$ 的極值是 $\ln 11$ 。

(i) 求 $f(x)$ 。

(ii) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

(6分)

7. 考慮曲線 $C: y = \frac{kx^2}{\sqrt{x^2 + 6}}$ ，其中 $k \neq 0$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

(b) 設 L_1 和 L_2 分別為 C 在 $x = \sqrt{3}$ 和 $x = -\sqrt{3}$ 的兩條切線。若 L_1 的 y 截距為 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，求 L_2 的方程。

(7分)

8. 設 $f(x) = 1 - \frac{5(2^{-x})}{2^{-x} + 1}$ 。

(a) 利用代換積分法，求 $\int f(x) dx$ 。

(b) 設 C 為 $y = f(x)$ 的曲線。

(i) 求 C 的 x 截距。

(ii) 求 C 、 x 軸與 y 軸圍成的區域的面積之真確值。

(7分)

乙部 (50 分)

9. 某城市內，於農曆新年前提供一次性清潔服務的清潔員的時薪依循平均值為 μ 及標準差為 \$10 的正態分佈。

(a) 現進行一項調查以估計 μ 。

(i) 隨機選出 16 名清潔員組成一個樣本，以下幹葉圖顯示他們的時薪(以 \$ 為單位)的分佈：

幹(十位)	葉(個位)
14	0 2 3 5 5 9
15	0 0 1 7 8
16	0 0 5
17	0 5

求 μ 的 95% 置信區間。

(ii) 求所需最小樣本容量使得 μ 的 99.5% 置信區間之闊度最大為 5。

(7 分)

(b) 假設 $\mu = 154$ 。於農曆新年前提供一次性清潔服務的清潔員的時薪為 \$145 或以下會被視為低，介乎 \$145 與 \$170 之間會被視為中等，\$170 或以上會被視為高。

(i) 求隨機選出提供有關服務的一名清潔員的時薪被視為高的概率。

(ii) 隨機選出提供有關服務的 15 名清潔員組成一個樣本。已知這樣本內有多於 10 名時薪屬於中等的清潔員，求選出最少 3 名時薪屬於高的清潔員的概率。

(6 分)

10. 某智能電話店內，若一名銷售員一星期內售出多於 2 部某型號的智能電話，則該銷售員售出該型號智能電話的銷量便被視為高。為了提升智能電話 P 的銷量，店主實施一個獎賞計劃：根據銷售員四星期中智能電話 P 的高銷量星期數目，銷售員會獲得不同獎賞如下所示。

四星期中智能電話 P 的高銷量星期數目	0	1	2	3	4
獎賞	\$0	\$120	\$300	\$750	\$1 200

釗民是該店的銷售員，過往紀錄顯示他一星期內售出智能電話 P 的數目依循方差為 2.6 的泊松分佈。

- (a) 求釗民某星期的智能電話 P 銷量為高的概率。 (2分)
- (b) 求釗民四星期中從智能電話 P 銷量所獲的預期獎賞金額。 (3分)
- (c) 店主建議一個新獎賞計劃。該新計劃中，若一名銷售員四星期內售出多於 5 部智能電話 P，便可獲 \$400 獎賞。否則，便不會獲得獎賞。釗民宣稱這個新獎賞計劃對他較有利。你是否同意？試解釋你的答案。 (2分)
- (d) 釗民一星期售出智能電話 Q 的數目依循平均值為 3 的泊松分佈。假設釗民每星期售

出的智能電話 P 和 Q 的數目相互獨立。

- (i) 求釗民某星期的智能電話 P 和 Q 的銷量均為高的概率。
- (ii) 已知釗民某星期的智能電話 P 和 Q 銷量均為高，求釗民該星期售出智能電話 P 和 Q 共多於 7 部的概率。

(5分)

11. 某工廠內，燈泡 A 產量的變率(以每小時千個為單位)可用下式模擬：

$$F(t) = t \ln(\sqrt{t} + 10),$$

其中 $t(0 \leq t \leq 8)$ 為某天自開始生產燈泡 A 起計所經過的時數。把該工廠當天開始生產燈泡 A 後首 2 小時的燈泡 A 產量記為 α 千個。設 α_1 為利用有 5 個子區間的梯形法則所得的 α 的估計值。

(a) (i) 求 α_1 。

(ii) 估計值 α_1 是過高還是過低？試解釋你的答案。

(6分)

- (b) 該工廠也生產燈泡 B。燈泡 B 產量的變率(以每小時千個為單位)可用下式模擬：

$$G(t) = \frac{t^2 + t + 4}{t + 2},$$

其中 $t(0 \leq t \leq 8)$ 為某天自開始生產燈泡 B 起計所經過的時數。

(i) 求該工廠當天開始生產燈泡 B 後首 2 小時的燈泡 B 產量。

(ii) 該工廠的經理宣稱在開始生產燈泡後的首 2 小時內，燈泡 A 與燈泡 B 的產量之差超過燈泡 B 產量的 16%。你是否同意？試解釋你的答案。

(6分)

12. 一項實驗中，某液體的溫度 x (以 $^{\circ}\text{C}$ 為單位) 可用下式模擬：

$$x = 150 - \frac{1\ 040}{5(\lambda^{kt}) + 8},$$

其中 $t (\geq 0)$ 為自該實驗開始起計所經過的分鐘數目， λ 和 k 均為常數，且 $\lambda > 1$ 。

(a) (i) 試以 λ 、 k 和 t 表示 $(x - 20)(x - 150)$ 。

(ii) 該實驗室的技术員宣稱該液體的溫度介乎 20°C 與 150°C 之間。你是否同意？試解釋你的答案。

(4 分)

(b) 已知 $\frac{dx}{dt} = \frac{\ln \lambda}{3\ 250}(x - 20)(x - 150)$ 。

(i) 求 k 。

(ii) 描述 x 和 $\frac{dx}{dt}$ 在實驗開始後首 30 分鐘期間如何變化。

(iii) 若該液體的溫度在實驗開始後首 25 分鐘期間的變化是 $\frac{2\ 400}{61}^{\circ}\text{C}$ ，求 λ 。

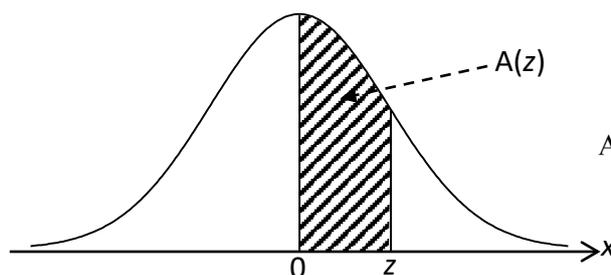
(9 分)

— 試卷完 —

標準正態分佈表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註：本表所列數字為標準正態曲線下由 $x = 0$ 至 $x = z$ ($z \geq 0$) 之間的面積。
負值 z 所對應的面積可利用對稱性求得。



$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

