

福建中學  
中四級 學年考試(2020-2021)  
數學 延伸部分 單元二  
(兩小時)

日期：二零二一年六月二十二日  
時間：上午八時三十分至上午十時三十分

姓名：\_\_\_\_\_  
班別：\_\_\_\_\_ 班號：\_\_\_\_\_

**考生須知：**

1. 本試卷分兩部，即甲部和乙部。
2. 本卷所有題目必須作答。
3. 答案必須寫在空位上。
4. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
5. 除特別指明外，數值答案必須用真確值表示。

**參考公式**

|                                                                 |                                                              |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$               | $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$  |
| $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$               | $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$  |
| $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$ | $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$  |
| $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$                       | $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ |
| $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$                       |                                                              |
| $2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$                       |                                                              |

1. 設  $f(x) = \frac{7x}{4+3x^2}$ 。證明  $f(1+h) - f(1) = \frac{h-3h^2}{7+6h+3h^2}$ 。由此，從基本原理解求  $f'(1)$ 。

(4 分)

- (a) 求  $n$  的值。

- (b) 求  $x^3$  的係數。

(4 分)

This image shows a full page of a worksheet designed for handwriting practice. It features 20 evenly spaced, horizontal dashed lines across the entire width of the page. The background is plain white, providing a clear guide for letter height and placement. There are no margins, text, or other markings present.

This image shows a full page of a worksheet designed for handwriting practice. It consists of approximately 20 horizontal dashed lines spaced evenly across the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no other markings or text present.

(a) 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

(b) 設  $k$  為一常數。若對所有  $x$  的實數值， $2\frac{d^2y}{dx^2}-3k^2\frac{dy}{dx}+20y=0$ ，求  $k$  的值。

(5 分)

$$h'(x) = \frac{1}{x}(x^2 - 2x + 25) \circ$$

(a)  $h(x)$  是否遞增函數？試解釋你的答案。

(b) 把  $y = h(x)$  的圖像記為  $H$ 。證明  $H$  只有一個拐點。

(5 分)

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or drawing. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

5. (a) 計算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} \sin 2x}{e^{3x} - e^{-3x}}$ 。

(b) 計算  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$ 。

(6 分)

6. (a) 證明  $\sin(A-B)\sin(A+B) = \cos^2 B - \cos^2 A$ 。

(b) 由此，解方程  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ，其中  $0 \leq x < \pi$ 。

(6 分)

[illegible]

[illegible]

(a) 證明  $F$  只有一個極小點。

(6 分)

(b) 利用 (a)，計算  $\sum_{r=445}^{666} \binom{r+2}{1\,036} \binom{r-1}{301}$ 。

(7 分)

[illegible]

This image shows a full page of a worksheet designed for handwriting practice. It consists of approximately 20 horizontal dashed lines spaced evenly across the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no other markings or text present.



This image shows a full page of handwriting practice paper. It features approximately 20 horizontal dashed lines spaced evenly down the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no margins or additional markings.

11. 已知函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$ ，其中  $a$  和  $b$  為常數。圖 1 所示為  $y = f'(x)$  的略圖。

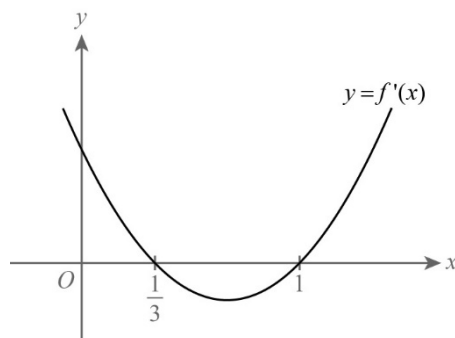


圖 1

- (a) 求  $a$  和  $b$  的值。

(3 分)

- (b) 求  $y = f(x)$  的圖像的  $x$  截距和  $y$  截距。

(2 分)

- (c) 求  $y = f(x)$  的圖像的極大點/極小點和拐點。

(5 分)

- (d) 描繪  $y = f(x)$  的圖像。

(2 分)

[illegible]

This image shows a full page of a worksheet designed for handwriting practice. It features approximately 20 horizontal dashed lines spaced evenly across the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no other markings or text present.

12. 圖 2 中， $PQ$  是長 12 km 的筆直海岸線。 $S$  和  $F$  是分別與  $P$  和  $Q$  相距 3 km 的島嶼，其中  $PS \perp PQ$  及  $QF \perp PQ$ 。 $M$  和  $N$  均是  $PQ$  上的點使得  $PM = x$  km 及  $NQ = 4$  km。

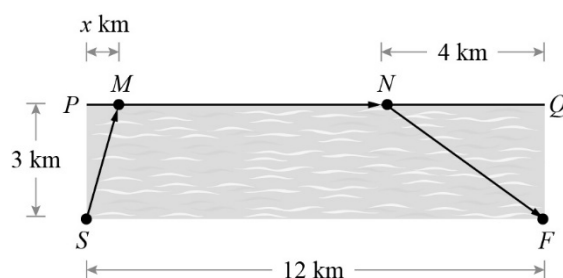


圖 2

在一個越野比賽中，某隊伍以固定速率 5 km/h 由  $S$  沿一直線航行至  $M$ ，然後以固定速率 12 km/h 沿海岸線踏單車至  $N$ 。最後他們以固定速率  $\frac{300}{20-x}$  km/h 由  $N$  航行至終點  $F$ 。設  $T$  小時為該隊伍完成比賽所需的時間。

- (a) (i) 試以  $x$  表示  $T$ 。  
(ii) 求  $T$  的極小值及其對應的距離  $SM$ 。

(6 分)

- (b) 圖 3 中，攝製組於  $C$  拍攝該隊伍，其中  $C$  在  $SF$  上，而  $SC$  的長度是 (a)(ii) 所得  $SM$  的長度的  $\sqrt{3}$  倍。設  $\angle RCN = \alpha$  及  $\angle RNC = \beta$ ，其中  $R$  是該隊伍踏單車途中的位置。

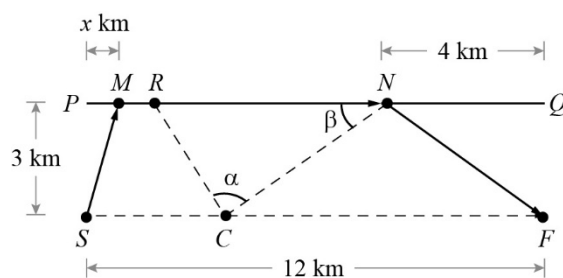


圖 3

- (i) 藉着求  $\sin \beta$  和  $\cos \beta$ ，證明  $RN = \frac{13 \tan \alpha}{2 \tan \alpha + 3}$  km。  
(ii) 當  $\alpha = 1$  弧度時，求  $\alpha$  的變率 (以弧度/秒為單位)。(答案須準確至三位有效數字。)

(7 分)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

[illegible]



[illegible]