



福建中學

FUKIEN SECONDARY SCHOOL

中六畢業試 (2020-2021)

數學 延伸部分 單元二

(兩小時 三十分鐘)

日期：二零二一年一月二十五日

時間：上午八時三十分至上午十一時

姓名：_____

班別：_____ 班號：_____

考生須知：

1. 本試卷分兩部，即甲部和乙部。
2. 本卷所有題目必須作答。
3. 答案必須寫在答題簿中。
4. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
5. 除特別指明外，數值答案必須用真確值表示。
6. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

參考公式

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$	
$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$	

(4 分)

[illegible]

2. 設 $P(x) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & (x-\lambda)^2 \\ 4 & x-\lambda & 0 \\ (x-\lambda)^3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ ，其中 λ 為一正實數。已知 $P(x)$ 的展開式中

(b) $P''(\lambda)$ ◦

(6 分)

[illegible]

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

(b) 設 k 為常數使得對於所有 x 的正值， $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + kx \frac{dy}{dx} + 4y = 0$ 。求 k 的值。

(5 分)

[illegible]

(b) 利用 (a), 解方程 $\cot\left(x + \frac{11\pi}{15}\right) = 3\tan\left(x - \frac{4\pi}{15}\right)$, 其中 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 。

(6 分)

[illegible]

6. (a) 利用代換積分法，求 $\int x^5 \sqrt{x^3+9} dx$ ，其中 $x \geq -\sqrt[3]{9}$ 。
- (b) 在曲線 Γ 上的任意一點 (x, y) ， Γ 的切線的斜率為 $10x^5 \sqrt{x^3+9}$ 。 Γ 的 y 截距是 -100 。求 Γ 的方程。

(7 分)

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of multiple sets of three horizontal dashed lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced across the entire page, which is otherwise blank white space. There are no margins, text, or other markings present.

7. 圖 1 中，汽車 X 以 16 m s^{-1} 的恒速率由 O 駛向 A ，而汽車 Y 則以 18 m s^{-1} 的恒速率由 B 駛向 O 。已知 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 。設汽車 X 與 O 之間的距離為 $x \text{ m}$ ，汽車 Y 與 O 之間的距離為 $y \text{ m}$ 及 X 與 Y 之間的距離為 $k \text{ m}$ 。

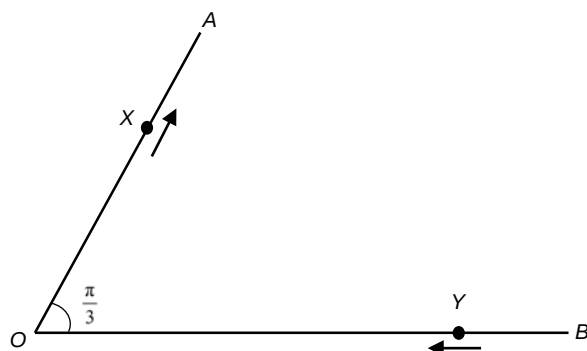


圖 1

- (a) 以 x 及 y 表 k^2 。
- (b) 求當 $x = 300$ 及 $y = 800$ 時， X 與 Y 之間的距離的變率。

(7 分)

This image shows a full page of white paper designed for handwriting practice. It features 18 evenly spaced, horizontal dashed lines that run across the entire width of the page. The lines are thin and light gray, providing a guide for letter height and placement without being distracting. There is no text or other markings on the page.

This image shows a full page of a handwriting practice worksheet. It consists of approximately 20 horizontal dashed lines spaced evenly down the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no other markings or text present.

$$(E): \begin{cases} x - y + z = 2k \\ 3x + 5y + (h+1)z = 4 \\ 4x + hy + (2h-3)z = k+2 \end{cases}, \text{ 其中 } h \text{ 及 } k \text{ 均為實數。}$$

- (a) 假設 (E) 有唯一解。
 - (i) 證明 $h \neq 6$ 及 $h \neq 8$ 。
 - (ii) 以 h 及 k 表示 z 。
- (b) 假設 $h = 8$ 及 (E) 有解。
 - (i) 求 k 。
 - (ii) 解 (E) 。

(8 分)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

10. (a) (i) 證明 $\int \tan^4 x dx = \frac{1}{3} \tan^3 x - \int \tan^2 x dx$ 。

(ii) 計算 $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \tan^4 x dx$ 。

(5 分)

(b) (i) 設 $f(x)$ 為 $a \leq x \leq b$ 上的連續函數，其中 a 及 b 均為常數，使得對於所有

$a \leq x \leq b$, $f(x) = f(a+b-x)$ 。證明 $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$ 。

(ii) 計算 $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} x \tan^4 x dx$ 。

(5 分)

(c) 考慮曲線 $\Gamma: y = \sqrt{x} \tan^2 x$ ，其中 $\frac{7\pi}{4} \leq x \leq \frac{9\pi}{4}$ 。設 R 為 Γ 、 x 軸、兩條直線 $x = \frac{7\pi}{4}$

及 $x = \frac{9\pi}{4}$ 所圍成的區域。求 R 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。

(3 分)

[illegible]

[illegible]

11. 設 $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 及 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ 。

- (a) (i) 計算 $P^t P$ 。
- (ii) 計算 $P^{-1} A P$ 。

(5 分)

(b) 對於任意矩陣 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ，定義 $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

(i) 對於任意矩陣 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ，證明 $\left\| P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$ 。

(ii) 考慮 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ，證明對於任意矩陣 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ， $\left\| A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq 11 \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$ 。

(7 分)

[illegible]

[illegible]

This image shows a full page of a worksheet designed for handwriting practice. It features approximately 20 horizontal dashed lines spaced evenly across the page, providing a guide for letter height and placement. The background is plain white, and there are no other markings or text present.