



福建中學

FUKIEN SECONDARY SCHOOL

中六畢業試 (2020-2021)

數學延伸部分 單元一

(兩小時三十分鐘)

日期：二零二一年一月二十五日

姓名：_____

時間：上午八時三十分至上午十一時

班別：_____ 班號：_____

考生須知

1. 在適當空格內填上你的姓名、班別及班號。
2. 本試卷分甲、乙兩部。甲部佔 50 分，乙部佔 50 分。
3. 甲及乙部各題均須作答，答案須寫在試題答題簿中。
4. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
5. 除特別指明外，數值答案須用真確值或四位小數表示。

1. 下表顯示一離散隨機變量 X 的概率分佈，其中 a 為一正常數及 $p > 0$ 。

x	0	1	$2a$	$4a$
$P(X = x)$	0.3	$2ap$	$2p$	p

(a) 求 a 的值。

(b) 求 $\text{Var}(aX - 5)$ 。

(6 分)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

4. 某行人天橋有一部升降機。假設該天橋 40% 的使用者會乘搭該升降機，且天橋使用者的決定是獨立的。逐一觀察該天橋的使用者。
- (a) 求直至找得一名天橋使用者乘搭升降機所觀察的使用者人數的平均值和方差。
- (b) 若下午 1:00 後首 k 名天橋使用者均沒有乘搭升降機，下午 1:00 後第 15 名天橋使用者出現前找得首名使用者乘搭升降機的概率大於 0.9。求 k 的最大值。
- (c) 若一小時內首 8 名天橋使用者均沒有乘搭升降機，該小時被視為不尋常。已知某天下午 1:00 至下午 6:00 每小時最少有 8 名天橋使用者。求當日下午 1:00 至下午 6:00 最少有 2 小時不尋常的概率。

(7分)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

5. 設 $f(x) = (1 + e^{-kx})^2$ ，其中 k 為一非零常數。
- (a) 依 x 的升幂次序展開 $f(x)$ 至含 x^2 的項為止。
- (b) 設 n 為一正整數。若 $(1 + e^{-kx})^2(1 + x)^n$ 的展開式中 x 的係數及 x^2 的係數分別為 8 及 12，求 k 及 n 的值。

(6 分)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

(b) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

(6分)

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

[illegible]

11. 某連鎖店有 A 和 B 兩間分店。兩間分店同時開業。該連鎖店的經理 美思 用下式模擬分店 A 的盈利的變率 (以每月千元為單位) :

$$\frac{dA}{dt} = t \ln(2t + 1) \quad ,$$

其中 t 為自兩間分店開業起計經過的月數。

- (a) (i) 利用梯形法則將區間分成 6 個子區間，估計分店 A 在首 6 個月的總盈利。
(ii) 在 (a)(i) 的估計值是過高還是過低？試解釋你的答案。

(5 分)

- (b) 美思用下式模擬分店 B 的盈利的變率 (以每月千元為單位) :

$$\frac{dB}{dt} = 40(t^2 - 1) + \frac{12}{t+2}$$

求分店 B 在首 2 個月的總盈利。

(2 分)

- (c) 由於鄰近地區正進行改善工程，美思改用下式模擬分店 *B* 由 $t=2$ 至 $t=6$ 的盈利的變率 (以每月千元為單位)：

$$\frac{dB}{dt} = \frac{40e^{-t}}{5e^{-t} + 1}$$

- (i) 利用代換 $u = 5e^{-t} + 1$ ，求分店 B 在首 6 個月的總盈利。
- (ii) 美思 宣稱分店 B 在首 6 個月的總盈利多於分店 A 。你是否同意？試解釋你的答案。

(5 分)

[illegible]

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

12. 一名科學家 凱琳 正進行一項測試，研究某液體的物理性質的變化。她以下式模擬該液體的溫度 P (以 $^{\circ}\text{C}$ 為單位)：

$$P = \frac{m}{(he^{-t} + 1)^k} \quad ,$$

其中 h 、 k 及 m 為常數，且 t 為自該測試開始起計經過的時數。

- (a) (i) 以 h 、 k 及 m 表示 $\frac{dP}{dt}$ 及 $\frac{d^2P}{dt^2}$ 。

(ii) 將 $\ln\left(\frac{m}{P}\right)$ 表為 $\ln(he^{-t}+1)$ 的線性函數。

(iii) 已知在 (a)(ii) 所得的線性函數的圖像通過原點及 $(3, 6)$ 。此外，已知在測試開

始時， $\frac{dP}{dt}$ 及 $\frac{d^2P}{dt^2}$ 皆為 20。求 h 、 k 及 m 的值。

(8 分)

- (b) 求當 $\frac{dP}{dt}$ 達至其最大值時該液體的溫度。

(2 分)

- (c) 凱琳發現該液體的體積與其溫度有以下關係：

$$V = \frac{500}{\sqrt{2.5P}} \text{ ,}$$

其中 V (以 cm^3 為單位) 為該液體的體積。凱琳宣稱當 $\frac{dP}{dt}$ 達至其最大值

時， $\frac{dV}{dt}$ 達至其最大值。你是否同意？試解釋你的答案。

(3分)

[illegible]

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

.....
試卷完

標準正態分佈表

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註： 本表所列數字為標準正態曲線下由 $x = 0$ 至 $x = z$ ($z > 0$) 之間的面積。
負值 z 所對應的面積可利用對稱性求得。

