

福建中學

FUKIEN SECONDARY SCHOOL

中六畢業試 (2020-2021) 數學延伸部分 單元一 (兩小時三十分鐘)

日期:二零二一年一月二十五日	姓名:	
時間:上午八時三十分至上午十一時	班別:	班號:

考生須知

- 1. 在適當空格內填上你的姓名、班別及班號。
- 2. 本試卷分甲、乙兩部。甲部佔50分,乙部佔50分。
- 3. 甲及乙部各題均須作答,答案須寫在試題答題簿中。
- 4. 除特別指明外,須詳細列出所有算式。
- 5. 除特別指明外,數值答案須用真確值或四位小數表示。

甲部(50分)

1. 下表顯示一離散隨機變量 X 的概率分佈,其中 a 為一正常數及 p>0。

X	0	1	2 <i>a</i>	4 <i>a</i>
P(X = x)	0.3	2ap	2 <i>p</i>	p

已知 E(aX+3)=7。

- (a) 求 a 的值。
- (b) $\Re \operatorname{Var}(aX 5) \circ$

(6分)

2. 設 A 及 B 為兩事件。將 B 的互補事件記為 B'。已知 $P(A \cup B) = \frac{4}{3}P(A)$ 、

 $P(B) = \frac{1}{2}P(A)$ 及 P(A|B') = k,其中 k 為一非零常數。

- (a) 以 k 表 P(A)。
- (b) A 與 B 是否互斥?試解釋你的答案。
- (c) 若 A 與 B 獨立, 求 k 的值。

(6分)

- 3. 某校舉辦一個保健計畫,該校的校長欲估計學生參與的比例 p。他隨機選取 625 名學生 組成一樣本進行調查,並求得 p 的近似 β % 置信區間為 $\left(\frac{9301}{15\,625},\frac{10\,699}{15\,625}\right)$ 。
 - (a) 求
 - (i) 參與該計畫的學生的樣本比例,
 - (ii) β , 準確至最接近的整數。
 - (b) 該校長隨機邀請 n 名學生參與該計畫。求 n 的最小值使得這些學生中至少有一名 參與該計畫的概率大於 0.9999。

(6分)

(7分)

- 4. 某行人天橋有一部升降機。假設該天橋 40% 的使用者會乘搭該升降機,且天橋使用者的 決定是獨立的。逐一觀察該天橋的使用者。
 - (a) 求直至找得一名天橋使用者乘搭升降機所觀察的使用者人數的平均值和方差。
 - (b) 若下午1:00 後首 k 名天橋使用者均沒有乘搭升降機,下午1:00 後第 15 名天橋使用者出現前找得首名使用者乘搭升降機的概率大於 0.9。求 k 的最大值。
 - (c) 若一小時內首 8 名天橋使用者均沒有乘搭升降機,該小時被視為不尋常。已知某天下午1:00至下午6:00每小時最少有 8 名天橋使用者。求當日下午1:00至下午6:00最少有 2 小時不尋常的概率。

- 5. 設 $f(x) = (1 + e^{-kx})^2$,其中 k 為一非零常數。
 - (a) 依 x 的升幂次序展開 f(x) 至含 x^2 的項為止。
 - (b) 設 n 為一正整數。若 $(1+e^{-kx})^2(1+x)^n$ 的展開式中 x 的係數及 x^2 的係數分別為 8 及 12,求 k 及 n 的值。

(6分)

- 6. 考慮曲線 $C: y = (2+x) \ln x (\ln x)^2$, 其中 x > 0。
 - (a) $\vec{x} \frac{dy}{dx}$ °
 - (b) 已知 C 在 $x = \beta$ 的切線的斜率是 2 。某人宣稱 β 只有一個可能值。你是否同意? 試解釋你的答案。

(6分)

7.	設 $f(x) = \frac{m}{2 - e^{-x} + ne^{-2x}}$,其中 m 及 n 均為常數。已知 $f(x)$ 於 $x = \ln 6$ 處達至其極	
	大值及 $f(0) = 4$ 。	
	(a) 求 m 及 n 。	
	(b) $\Re \lim_{x\to\infty} f(x)$ °	
	(6分)	

- 8. 設 k 為一常數且 k > 1。
 - (a) 藉考慮 $\frac{d}{dx}(x^k \ln x)$,求 $\int x^{k-1} \ln x dx$,其中 x > 0。
 - (b) 已知由曲線 $y=x^{k-1}\ln x \cdot x$ 軸、直線 x=1 及 x=2 圍成的區域的面積為 $\frac{1}{k^2}$ 。求 k 的真確值。

H J J-K-HEILL	
	(7分)
	(, , , ,

乙部(50分)

- 9. 某城市的一間診所每天進行病毒檢測的人數可用一平均值為每天 2 人的泊松分佈來模 擬。
 - (a) 求某天該診所為多於 3 人進行病毒檢測的概率。

(2分)

- (b) (i) 求在其後三天裏,該診所至少一天為多於 3 人進行病毒檢測的概率。
 - (ii) 已知在其後三天裏,該診所至少一天為多於 3 人進行病毒檢測,求在這三天裏, 恰好有 2 天該診所為多於 3 人進行病毒檢測的概率。

(4分)

- (c) 某醫生發現若為已感染病毒的人進行檢測,95%的被檢測者會得出陽性結果。若為沒有感染病毒的人進行檢測,16%的被檢測者會得出陽性結果。假設該城市中有6%的市民感染該病毒。
 - (i) 求隨機選取一名該城市的市民進行病毒檢測,得出陽性結果的概率。
 - (ii) 已知某天該診所為最多 3 人進行病毒檢測,求當中恰好有 2 人得出陰性結果的概率。
 - (iii) 已知在 2020 年 9 月 2 日至 2020 年 9 月 4 日期間,該診所每天只為 1 至 2 人進行病毒檢測。求在這段期間內共有 4 人得出陰性結果的概率。

(7分)

10.	某廉價航空公司的航班延誤的時間依循一平均值為	μ	小時及標準差為 3	小時的正態
	分佈。			

(a) (i) 為了估計 μ,隨機選出 25 班航班組成一樣本,並記錄航班延誤的時間 (單位 為小時) 如下:

> 0 1 1 2 2 2 1 3 6 7 7 4 9 4 5 5 5 6 10 12 12 13

求 μ 的 97% 置信區間。

(ii) 求最小樣本容量使得樣本中的航班延誤的時間與 μ 相差不超過 2 小時的概率 最少為 0.985。

(7分)

(5分)

- (b) 假設 $\mu = 6$ 。若該航空公司的一班航班延誤的時間超過 12 小時,航空公司會向受 影響航班的乘客送出一張免費餐券。
 - (i) 若從該航空公司中隨機選出一班航班,求航空公司會向該航班的乘客送出免費 餐券的概率。
 - (ii) 該航空公司每星期只能負擔 2 班航班的免費餐券。在某星期中,已知該航空公司的 4 班航班啟航後,仍有免費餐券,求免費餐券剛好於第 10 班航班啟航後全部送出的概率。

11. 某連鎖店有 A 和 B 兩間分店。兩間分店同時開業。該連鎖店的經理 <u>美思</u>用下式模擬分店 A 的盈利的變率 (以每月千元為單位):

$$\frac{dA}{dt} = t \ln(2t+1) \quad ,$$

其中 t 為自兩間分店開業起計經過的月數。

- (a) (i) 利用梯形法則將區間分成 6 個子區間,估計分店 A 在首 6 個月的總盈利。
 - (ii) 在 (a)(i) 的估計值是過高還是過低?試解釋你的答案。

(5分)

(b) 美思用下式模擬分店 B 的盈利的變率 (以每月千元為單位):

$$\frac{dB}{dt} = 40(t^2 - 1) + \frac{12}{t + 2}$$

求分店 B 在首 2 個月的總盈利。

(2分)

(5分)

(c) 由於鄰近地區正進行改善工程,<u>美思</u>改用下式模擬分店 B 由 t=2 至 t=6 的盈利的變率 (以每月千元為單位):

$$\frac{dB}{dt} = \frac{40e^{-t}}{5e^{-t} + 1}$$

- (i) 利用代換 $u=5e^{-t}+1$,求分店 B 在首 6 個月的總盈利。
- (ii) <u>美思</u>宣稱分店 B 在首 B 在首 B 個月的總盈利多於分店 A。你是否同意?試解釋你的答案。

12. 一名科學家 <u>凱琳</u>正進行一項測試,研究某液體的物理性質的變化。她以下式模擬該液體的温度 $P(以 \, ^{\circ} C \,$ 為單位):

$$P = \frac{m}{\left(he^{-t} + 1\right)^k} ,$$

其中 $h \cdot k$ 及 m 為常數,且 t 為自該測試開始起計經過的時數。

- (a) (i) 以 $h \cdot k$ 及 m 表示 $\frac{dP}{dt}$ 及 $\frac{d^2P}{dt^2}$ 。
 - (ii) 將 $\ln\left(\frac{m}{P}\right)$ 表為 $\ln(he^{-t}+1)$ 的線性函數。
 - (iii) 已知在 (a)(ii) 所得的線性函數的圖像通過原點及 (3,6)。此外,已知在測試開始時, $\frac{dP}{dt}$ 及 $\frac{d^2P}{dt^2}$ 皆為 20。求 h、k 及 m 的值。

(8分)

(b) 求當 $\frac{dP}{dt}$ 達至其最大值時該液體的温度。

(2分)

(3分)

(c) <u>凱琳</u>發現該液體的體積與其温度有以下關係:

$$V = \frac{500}{\sqrt{2.5P}} ,$$

其中 V (以 cm^3 為單位) 為該液體的體積。<u>凱琳</u>宣稱當 $\frac{dP}{dt}$ 達至其最大值 時, $\frac{dV}{dt}$ 達至其最大值。你是否同意?試解釋你的答案。

中六級 數學延伸部份單元一	第 19 頁,共 20 頁

標準正態分佈表

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註: 本表所列數字為標準正態曲線下由 x=0 至 x=z(z0) 之間的面積。 負值 z 所對應的面積可利用對稱性求得。

