

福建中學
中五級 上學期考試 (2020-2021)
數學 延伸部分 單元二
(兩小時)

日期：二零二一年一月十二日
時間：上午八時三十分至上午十時三十分

姓名：_____
班別：_____ 班號：_____

考生須知：

1. 本試卷分兩部，即甲部和乙部。
2. 本卷所有題目必須作答。
3. 答案必須寫在空位上。
4. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
5. 除特別指明外，數值答案必須用真確值表示。

參考公式

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$	$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$	$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$	
$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$	

(a) $\int_0^3 (x+2)\sqrt{4-x}dx$ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 3x dx$ (c) $\int_{-3}^3 \frac{1}{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}} dx$ (d) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+2x^3 \cos^5 x) dx$

(13 分)

2. 已知 $f(x)$ 是偶函數。若 $\int_0^6 f(x)dx = a$ 及 $\int_{-6}^6 [f(x) + 3x^2]dx = 440$ ，求 a 的值。

(3 分)

[illegible]

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple sets of horizontal lines designed to guide young learners' handwriting. Each set consists of three lines: two dashed outer lines defining the height of capital letters, and a solid middle line for lowercase letters. These sets are repeated vertically down the entire page, providing ample space for practicing letter formation and writing. The background is white, and the lines are light gray.

3. (a) 運用分部積分法，計算 $\int_1^3 x^2 \ln x \, dx$ 。
 (b) 利用代換 $u = \frac{1}{x}$ 及 (a)，計算 $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln x}{x^4} \, dx$ 。

(4 分)

4. (a) 計算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx$ 。
- (b) 若 $\frac{1}{u(u-1)} \equiv \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$ ，求 A 和 B 的值。
- (c) 利用 (a) 和 (b)，或用其他方法，計算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x(e^x-1)} dx$ 。

(6 分)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

7. 圖 2 中，一個圓柱內接於一個半徑為 2 cm 的球體。求圓柱的極大體積。

(6 分)

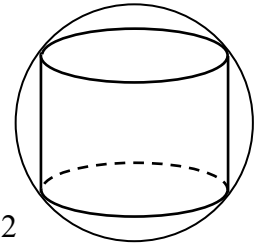


圖 2

8. 考慮曲線 $C: y=10e^{-x}$ ，其中 $x>0$ 。已知 P 為 C 上的一點。通過 P 的水平線與 y 軸相交於點 D ，且曲線 C 與 y 軸相交於點 E 。把 P 的 y 坐標記為 v 。

- (a) 求 $\triangle PDE$ 的面積，答案以 v 表示。

- (b) 若 P 沿 C 移動使得 PD 以每秒 $\frac{1}{5}$ 單位的率遞增，當 $PD = \ln 2$ 單位時，求 $\triangle PDE$ 的面積的變率。

(6 分)

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a full page of blank primary-ruled paper. It features multiple sets of horizontal lines designed to guide young learners' handwriting. Each set consists of three lines: two dashed lines at the top and bottom, and a solid line in the middle. These sets are repeated vertically down the entire page, providing ample space for practicing letter formation and alignment. The background is white, and the lines are black.

(a) 求 Γ 的方程。

(i) 求 P 的坐標。

(ii) 求垂直於 L 及通過 P 的直線方程。

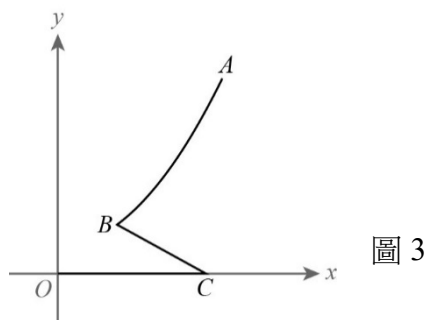
(8 分)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

11. (a) 圖 3 中，曲線 Γ 包含曲線 AB 、線段 BC 和 CO ，其中 O 為原點， B 在第一象限內且 C 在 x 軸上。 AB 和 BC 的方程分別為 $x^2 - 3y + 5 = 0$ 和 $x + y - 5 = 0$ 。



- (i) 求 B 的坐標。
- (ii) 設 h 為 A 的 y 坐標，其中 $h > 3$ 。將 Γ 繞 y 軸旋轉成一隻杯。
- 證明該杯的容量是 $\frac{\pi}{2}(3h^2 - 10h + 81)$ 。
- (b) 將 (a)(ii) 所描述的杯放在水平的桌面上。杯底半徑和杯口半徑分別為 5 cm 和 7 cm。
- (i) 求該杯的容量。
- (ii) 將水以恆速率 $20\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ 倒進該杯內。當杯內水的體積為 $53\pi \text{ cm}^3$ 時，求水深的變率。
- (14 分)

This image shows a full page of a worksheet designed for handwriting practice. It features 15 evenly spaced, horizontal dashed lines across the entire width of the page. The background is plain white, providing a clear guide for letter height and placement. There are no margins, text, or other markings present.

[illegible]

12. (a) 設 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 。證明 $\frac{1}{12 \cos 2x + 13} = \frac{\sec^2 x}{24 + \sec^2 x}$ 。

(b) 計算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{12\cos 2x+13} dx$ 。

(c) 設 $s(x)$ 為定義在 $\mathbf{R}$ 上的連續函數使得 $y = s(x)$ 的圖像繞原點旋轉對稱。對任何 $t \in \mathbf{R}$ ，證明 $\int_{-t}^t s(x) \ln(1 + e^x) dx = \int_0^t xs(x) dx$ 。

(d) 計算 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{12 \sin 2x}{(12 \cos 2x + 13)^2} \ln(1 + e^x) dx$ 。

(14 分)

[illegible]

[illegible]

[illegible]