

福建中學
中四級 上學期考試 (2020-2021)
數學 延伸部分 單元一
(兩小時)

日期：二零二一年一月十四日

姓名：_____

時間：上午八時三十分時至上午十時三十分

班別：_____ 班號：_____

考生須知：

1. 本試卷分兩部份，即甲部(68分)和乙部(32分)。
2. 所有試題均須作答。答案須寫在答題簿上。
3. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
4. 除特別指明外，所有數值答案須用真確值或四位小數表示。
5. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。

甲部 (68分)

1. 志傑把\$10 000 存入銀行，年利率為 $r\%$ 。若複利息按年計算，3 年後所得的本利和為 \$13 310。

(a) 求 r 。

(b) 若利息連續計算，求所得的本利和，答案準確至最接近的整數。

(4分)

2. (a) 化簡 $\frac{(n+2)!}{2!n!}$ 。

(b) 由此，解 $6C_2^{n+2} + C_1^{n-1} = 478$ 。

(6分)

3. 已知 n 是一個正整數。若按 x 的降冪展開 $\left(x^4 + \frac{1}{2x^2}\right)^n$ 時，展開式中的第 9 項為常數，求 n 及該常數項的值。

(4分)

4. (a) 依 x 的升冪次序展開 e^{-2x} 到含 x^2 的項為止。

(b) 在 $\frac{(1+ax)^8}{e^{2x}}$ 的展式中， x 項的係數是 2 及 $a \neq 0$ 。

(i) 求 a 。

(ii) 求 x^2 項的係數。

(7分)

5. 求下列方程的解。

(a) $\ln(5x-3) - \ln(7x-19) = \ln 6$ 。

(b) $\ln x + \ln(x-6) = \ln 16$ 。

(c) $8e^x - e^{-x} = 7$ 。

(9分)

6. 某湖內湖水起初的 pH 值為 6。在一次意外中，該湖受到鹼性廢料所污染。一名研究人員每天記錄湖水的 pH 值，並發現湖水的 pH 值能以 $P(t) = a + te^{-kt}$ 模擬，其中 $t(\geq 0)$ 為湖水被污染後的天數， a 及 k 為正常數。

(a) 求 a 的值。

(b) 已知 $P(2) - P(1) = 0.228338$ 。求 k 的值，答案準確至一位小數。

(6分)

7. 求下列各極限。

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 7x + 1}{3x^2 - 2x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 7x + 1}{3x^2 - 2x - 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13 - 2e^x}{6e^{-2x} + 8e^x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 7x - 5}}$

(8分)

8. (a) 展開 $(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})$ 。

(b) 已知 $y = f(x) = \sqrt{x}$ 。

(i) 求 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。

(ii) 由此，求 $f'(9)$ 。

(7分)

9. 求下列各函數對 x 的導數。

(a) $y = x^3 + 3x + 4 + 2x^{-2}$

(b) $y = (3x^2 + 2x + 1)^7$

(c) $y = x^2 e^{-x}$

(d) $y = x^2 \ln x$

(e) $y = \ln(x^7 + 4x^2 + 100)$

(11分)

10. 已知 $y = e^{kx}$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

(b) 由此，若 $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ ，求 k 的值。

(6分)

乙部 (32 分)

11. 已知 $f(-3) = -4$ 及 $f'(-3) = 2$ 。設 $g(x) = \frac{6x-1}{f(x)}$ ，求 $g'(-3)$ 。

(6 分)

12. 若曲線 $y = f(x) = \frac{4x}{x^2-3}$ 通過點 $A(a, 2)$ 且 $a < 0$ 。

(a) 求 a 。(b) 求曲線 $y = f(x)$ 於點 A 的切線方程。

(8 分)

13. (a) 按 x 的升幂序，展開 $(1+ax)^2(1+bx)^{10}$ 至 x^2 項。

(b) 若(a)的展開式中， x 和 x^2 的係數分別為 1 和 $\frac{-19}{4}$ ，(i) 求 a 和 b 的值，(ii) 當 $b > 0$ ，求 $(1+ax)^3(1+bx)^{10}$ 的展開式中 x 的係數。

(10 分)

14. 某生態學者研究米埔自然保護區內的雀鳥。雀鳥當中只有 21% 為「留鳥」，即屬全年均可找到的雀鳥，而其餘則為候鳥。該生態學者建議某種候鳥的數目 $N(t)$ ，可用以下函數模擬：

$$N(t) = \frac{3000}{1 + ae^{-bt}},$$

其中 a 、 b 為正常數， t 為這種候鳥在該年首次在米埔出現時起計的日數。

(a) 將 $\ln \frac{3000}{N(t)} - 1$ 表為 t 的線性函數。(b) 已知 (a) 所得的線性函數圖像的水平軸截距及鉛垂軸截距分別為 13 及 3.9，求 a 和 b 的值，答案須準確至一位小數。(c) 利用(b)部所求的 a 和 b 的值，求 $N(16)$ 。

(8 分)

試卷完